

<到達目標> 自分の習得状況を定期的にチェックせよ。

- 1 円と楕円の方程式を媒介変数表示できる
- 2 楕円の媒介変数表示と三角関数を用いて、最大・最小問題を解くことができる
- 3 サイクロイドの媒介変数表示を求めることができる

<「円と楕円の媒介変数表示」の根本はすべて「 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 」にあります!>

① 次の問いに答えよ。

(1) 次の円の方程式を媒介変数 θ を用いて表せ。

① $x^2 + y^2 = r^2$ ② $x^2 + y^2 = 1$

③ $x^2 + y^2 = 9$ ④ $x^2 + y^2 = 5$

(2) 次の円の方程式を媒介変数 θ を用いて表せ。

① $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ② $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

③ $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$ ④ $(x-2)^2 + y^2 = 3$

⑤ $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 9$ ⑥ $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$

⑦ $(x-p)^2 + (y-q)^2 = k^2$ ⑧ $(x-k)^2 + (y-2k)^2 = t^2$

(3) 次の楕円の方程式を媒介変数 θ を用いて表せ。

① $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ② $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

③ $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ④ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$

⑤ $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{25} = 1$ ⑥ $x^2 + 9y^2 = 9$

(4) 次の楕円の方程式を媒介変数 θ を用いて表せ。

① $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ ② $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

③ $\frac{(x+1)^2}{5} + (y-4)^2 = 1$ ④ $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$

⑤ $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$ ⑥ $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$

(5) 次の媒介変数表示から媒介変数を消去せよ。

① $x = 3\cos\theta, y = 2\sin\theta$ ② $x = 4\cos\theta, y = 5\sin\theta$

③ $x = \sqrt{2}\cos\theta, y = 3\sin\theta$ ④ $x = 2\cos\theta, y = \sqrt{7}\sin\theta$

⑤ $x = 3\cos\theta + 4, y = 3\sin\theta + 6$ ⑥ $x = 2\cos\theta - 1, y = \sin\theta + 3$

⑦ $x = 1 + 2\cos\theta, y = -2 + \sin\theta$ ⑧ $x = 2 - \cos\theta, y = 1 + \sin\theta$

<媒介変数表示にすれば、三角関数の問題に落とし込むことができます!!>

② 次の問いに答えよ。

(1) 実数 x, y が $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ を満たして変化するとき、 $2x+y$ の最大値、最小値を求めよ。

(2) 楕円 $E: \frac{(x+1)^2}{4} + y^2 = 1$ 上の点 $P(x, y)$ について, $x+y^2$ の値の最大値と最小値を求めよ。

(3) 楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ に内接し, 辺が座標軸に平行な長方形の面積 S の最大値を求めよ。

<「サイクロイド曲線」は積分の分野においても大変重要です。ここではサイクロイド曲線の式を導く方法を学んでください。それ自体が問題になることもあります!!>

③ 半径 a の円が x 軸に接しながら滑ることなく正の方向に回転する。円周上の定点 P がはじめ原点 O に位置している。その位置から円が角 θ だけ回転したときの点 P の座標を (x, y) とするとき, x, y を θ を用いて表せ。

解答

- ① (1) ① $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ② $x = \cos\theta, y = \sin\theta$
 ③ $x = 3\cos\theta, y = 3\sin\theta$ ④ $x = \sqrt{5}\cos\theta, y = \sqrt{5}\sin\theta$
 (2) ① $x = r\cos\theta + a, y = r\sin\theta + b$ ② $x = \cos\theta + 1, y = \sin\theta - 2$
 ③ $x = 2\cos\theta - 3, y = 2\sin\theta + 1$ ④ $x = \sqrt{3}\cos\theta + 2, y = \sqrt{3}\sin\theta$
 ⑤ $x = 3\cos\theta - 4, y = 3\sin\theta + 3$ ⑥ $x = a\cos\theta + a, y = a\sin\theta + a$
 ⑦ $x = k\cos\theta + p, y = k\sin\theta + q$ ⑧ $x = t\cos\theta + k, y = t\sin\theta + 2k$
 (3) ① $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ ② $x = 2\cos\theta, y = 3\sin\theta$
 ③ $x = \cos\theta, y = 2\sin\theta$ ④ $x = 4\cos\theta, y = \sqrt{5}\sin\theta$
 ⑤ $x = \sqrt{3}\cos\theta, y = 5\sin\theta$ ⑥ $x = 3\cos\theta, y = \sin\theta$
 (4) ① $x = 3\cos\theta - 2, y = 2\sin\theta + 1$ ② $x = 4\cos\theta + 1, y = 3\sin\theta - 3$
 ③ $x = \sqrt{5}\cos\theta - 1, y = \sin\theta + 4$ ④ $x = 5\cos\theta + 3, y = \sqrt{3}\sin\theta - 2$
 ⑤ $x = a\cos\theta + p, y = b\sin\theta + q$ ⑥ $x = a\cos\theta + a, y = b\sin\theta + b$
 (5) ① $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ② $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ③ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1$ ④ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$
 ⑤ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 9$ ⑥ $\frac{(x+1)^2}{4} + (y-3)^2 = 1$
 ⑦ $\frac{(x-1)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$ ⑧ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$

② (1) 最大値 5, 最小値 -5 (2) 最大値 1, 最小値 -3 (3) 最大値 24

③ $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$